

CALCUL INTÉGRAL

Dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $I, J, \dots$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Quand on notera $[a, b]$, il sera sous-entendu que $a \leq b$.

Ce chapitre développe une théorie de l'intégration **sur un segment** seulement. Vous étudierez en spé une théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque.

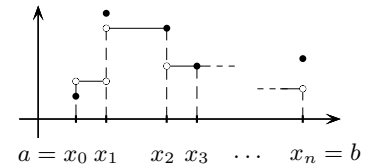
1 INTÉGRALE D'UNE FONCTION EN ESCALIER

1.1 FONCTION EN ESCALIER

Définition (Fonction en escalier, subdivision adaptée) On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *en escalier* s'il existe des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que :

- 1) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;
- 2) f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Un tel ensemble $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ entre deux points consécutifs desquels f est constante est appelé une *subdivision de $[a, b]$ adaptée à f* .



Dans la suite de ce cours, quand nous introduirons une subdivision de $[a, b]$ sous la forme $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$, il sera sous-entendu que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Par ailleurs, l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ sera noté $\mathcal{E}([a, b])$.

Théorème (Propriétés élémentaires des fonctions en escalier)

- Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$. Lorsqu'on ajoute un nombre fini de points à une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , le résultat est encore une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f .
- L'ensemble $\mathcal{E}([a, b])$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble $\mathbb{R}^{[a, b]}$ des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$, la réunion d'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et d'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à g est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à toute combinaison linéaire de f et g ainsi qu'au produit $f \times g$.

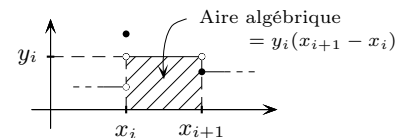
1.2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION EN ESCALIER

Définition (Intégrale d'une fonction en escalier) Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$.

- Soit $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f . Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Alors le réel $\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$ ne dépend pas de la subdivision $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ choisie.

- Ce réel est appelé l'*intégrale de f sur $[a, b]$* et noté $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_{[a, b]} f(t) dt$.



Démonstration Pour toute subdivision $\sigma = \{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ adaptée à f , notons I_σ le réel $\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$ décrit dans le théorème.

- Montrons d'abord que pour toutes subdivisions σ, σ' de $[a, b]$ adaptées à f , si $\sigma' \subseteq \sigma$ alors $I_\sigma = I_{\sigma'}$. Soient σ, σ' deux telles subdivisions, disons $\sigma = \{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$. Comme $\sigma' \subseteq \sigma$, on peut écrire $\sigma' = \{x_{\varphi(j)}\}_{0 \leq j \leq n'}$ pour un certain $n' \in \mathbb{N}$ et une certaine fonction $\varphi : \llbracket 0, n' \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$ strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(n') = n$ — c'est le principe des suites extraites... Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$, et pour tout $j \in \llbracket 0, n' \rrbracket$, y'_j sa valeur sur $]x_{\varphi(j)}, x_{\varphi(j+1)}[$.

$$I_{\sigma'} = \sum_{j=0}^{n'-1} y'_j(x_{\varphi(j+1)} - x_{\varphi(j)}) = \sum_{j=0}^{n'-1} \sum_{k=\varphi(j)}^{\varphi(j+1)-1} y'_j(x_{k+1} - x_k) \stackrel{y'_j = y_k}{=} \sum_{j=0}^{n'-1} \sum_{k=\varphi(j)}^{\varphi(j+1)-1} y_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) = I_\sigma.$$

- Montrons enfin comme voulu que le réel I_σ ne dépend pas du choix de σ . Soient donc σ, σ' deux subdivisions de $[a, b]$ adaptées à f . Nous savons que $\sigma \cup \sigma'$ est encore une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , et comme $\sigma \subseteq \sigma \cup \sigma'$ et $\sigma' \subseteq \sigma \cup \sigma'$, $I_\sigma = I_{\sigma \cup \sigma'}$ et $I_{\sigma'} = I_{\sigma \cup \sigma'}$ d'après le point précédent. A fortiori : $I_\sigma = I_{\sigma'}$. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^{n+1} [t] \, dt = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} [t] \, dt = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} k \, dt = \sum_{k=0}^n k((k+1) - k) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier) Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$.

- (i) **Linéarité** : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.
- (ii) **Positivité** : Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$. **Croissance** : Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- (iii) **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- (iv) **Relation de Chasles** : Pour tout $c \in [a, b]$: $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Démonstration Nous pouvons nous donner une subdivision $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ adaptée à f et à g — il suffit pour cela de faire la réunion d'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et d'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à g .

- (i) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ est aussi une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $\lambda f + \mu g$ et :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{(\lambda f + \mu g) \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)}^{\text{Valeur de } \lambda f + \mu g \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)}_{\text{Valeur de } f \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1} - x_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{g \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)}_{\text{Valeur de } g \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[} (x_{i+1} - x_i) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g. \end{aligned}$$

- (ii) Si $f \geq 0$, alors : $\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n-1} f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) (x_{i+1} - x_i) \geq 0$.

Et si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$, donc $\int_{[a,b]} (g - f) \geq 0$ par positivité, et enfin $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$ par linéarité.

- (iii) La fonction $|f|$ est toujours en escalier sur $[a, b]$. Comme $-|f| \leq f \leq |f|$, alors d'après (i) et (ii) :

$$\int_{[a,b]} (-|f|) = - \int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|, \quad \text{i.e.} \quad \left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

- (iv) Soit $c \in [a, b]$. Quitte à ajouter c aux $x_1, x_2, \dots, x_n$, on peut supposer que $x_k = c$ pour un certain $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors f est en escalier sur $[a, c]$ (resp. $[c, b]$) de subdivision adaptée $\{x_i\}_{0 \leq i \leq k}$ (resp. $\{x_i\}_{k \leq i \leq n}$) et :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{k-1} f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=k}^{n-1} f \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) (x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f. \quad \blacksquare$$

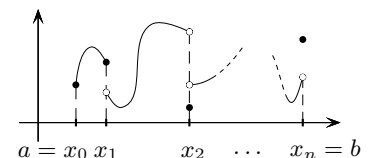
2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

2.1 FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

Définition (Fonction continue par morceaux, subdivision adaptée) On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* s'il existe des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que :

- 1) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;
- 2) $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Un tel ensemble $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ entre deux points consécutifs desquels f est continue et prolongeable par continuité aux bornes est appelé une *subdivision de $[a, b]$ adaptée à f* .



*** **Attention !** Une fonction comme $x \mapsto \frac{1}{x}$, même prolongée en 0, n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ car le prolongement en 0 ne peut pas se faire par continuité.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Le théorème « Propriétés élémentaires des fonctions en escalier » est encore valable dans le cas des fonctions continues par morceaux. Retenons en outre que les fonctions continues par morceaux généralisent à la fois les fonctions en escalier et les fonctions continues :

$$\mathcal{E}([a, b]) \subseteq \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}).$$

2.2 APPROXIMATION D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX PAR DES FONCTIONS EN ESCALIER

Théorème (Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi < \varepsilon$.

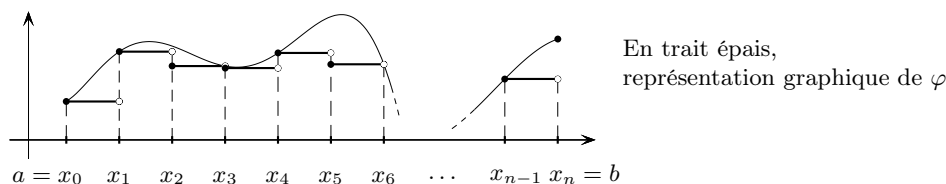
Démonstration

- **Cas où f est continue sur $[a, b]$:** Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$: $|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} < \alpha$, puis posons $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ de façon à avoir : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Notons enfin φ la fonction définie par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(x) = \min_{[x_k, x_{k+1}[} f \quad \text{et} \quad \varphi(x_n) = \varphi(b) = f(b).$$

Cette définition est possible car toute fonction continue sur un segment y possède un minimum. On définit une fonction ψ de la même manière avec un « max » à la place du « min ».

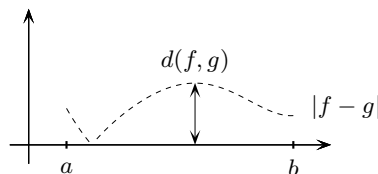
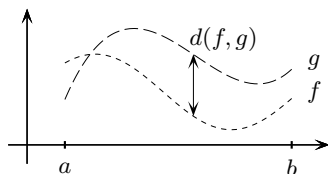


Par construction, φ et ψ sont en escalier sur $[a, b]$ et $\varphi \leq f \leq \psi$. Il reste à vérifier que $\psi - \varphi < \varepsilon$. Soit $x \in [a, b]$ — en b , le résultat est clair. Alors $x \in [x_k, x_{k+1}[$ pour un certain $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Le minimum de f sur $[x_k, x_{k+1}[$ est atteint en un certain y_k et son maximum en un certain z_k . L'inégalité $|z_k - y_k| \leq |x_{k+1} - x_k| = \frac{b-a}{n} < \alpha$ et la continuité uniforme de f nous donnent finalement le résultat voulu : $\psi(x) - \varphi(x) = f(z_k) - f(y_k) < \varepsilon$.

- **Cas général :** Donnons-nous une subdivision $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ adaptée à f et fixons $\varepsilon > 0$. Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Comme f est continue sur $[x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1} , nous pouvons nous donner des fonctions φ_i et ψ_i en escalier sur $[x_i, x_{i+1}[$ telles que $\varphi_i \leq f \leq \psi_i$ et $\psi_i - \varphi_i < \varepsilon$. « Collant » les φ_i les unes à la suite des autres pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et faisant de même avec les ψ_i , nous obtenons deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi < \varepsilon$ comme voulu. ■

Définition (Distance uniforme)

- (i) Pour toutes $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, on appelle *distance (uniforme) entre f et g* le réel : $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.



- (ii) **Inégalité triangulaire :** Pour toutes $f, g, h \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$: $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Démonstration

- (i) La fonction $|f - g|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ donc bornée sur chacun des sous-segments sur lesquels elle est prolongeable par continuité. Comme ces sous-segments sont en nombre fini, $|f - g|$ est en fait bornée sur tout $[a, b]$. L'existence de $d(f, g)$ découle enfin de la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

- (ii) Pour tout $x \in [a, b]$: $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g)$ d'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\left\{ |f(x) - g(x)| \right\}_{x \in [a, b]}$ est ainsi majoré par $d(f, h) + d(h, g)$, donc $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ par définition de $d(f, g)$. ■

Théorème (Densité de $\mathcal{E}([a, b])$ dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$) Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Il existe une suite de fonctions en escaliers $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b])^{\mathbb{N}}$ pour laquelle $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_n) = 0$. On peut même imposer si on le souhaite les inégalités $\varphi_n \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ — ou bien $f \leq \varphi_n$.

On résume généralement ce résultat ainsi : toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est la limite *uniforme* d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons vu qu'il existe des fonctions $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{E}([a, b])$ telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et $\psi_n - \varphi_n < \frac{1}{2^n}$. En particulier $0 \leq f - \varphi_n \leq \frac{1}{2^n}$ sur $[a, b]$, donc $d(f, \varphi_n) \leq \frac{1}{2^n}$. Le théorème des gendarmes enfin montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_n) = 0$. ■

2.3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux) Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

- Pour toute suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b])^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_n) = 0$, la suite $\left(\int_{[a, b]} \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Cette limite unique est appelée l'*intégrale de f sur $[a, b]$* et notée $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_{[a, b]} f(t) dt$. Lorsque $f \in \mathcal{E}([a, b])$, cette définition coïncide avec celle que nous avons déjà vue.

☞ ☞ ☞ **Explication** Nous avons vu qu'IL EXISTE toujours une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b])^{\mathbb{N}}$ dont la limite (uniforme) est précisément f . On aurait bien envie, du coup, de définir l'intégrale $\int_{[a, b]} f$ comme la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} \varphi_n$ — avec l'idée que l'aire algébrique sous φ_n tend vers l'aire algébrique sous f lorsque n tend vers ∞ . Cette « définition », hélas, pose trois problèmes :

- 1) La limite existe-t-elle ?
- 2) Ne dépend-elle pas du choix de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- 3) Pour les fonctions en escalier, nos deux définitions de l'intégrale coïncident-elles ?

Démonstration

- Soient $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b])^{\mathbb{N}}$ des suites de fonctions telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \psi_n) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\left| \int_{[a, b]} \varphi_n - \int_{[a, b]} \psi_n \right| = \left| \int_{[a, b]} (\varphi_n - \psi_n) \right| \leq \int_{[a, b]} |\varphi_n - \psi_n| \leq \int_{[a, b]} d(\varphi_n, \psi_n) = (b-a)d(\varphi_n, \psi_n) \leq (b-a)(d(f, \varphi_n) + d(f, \psi_n)).$$

Nous noterons ★ ce résultat : $\left| \int_{[a, b]} \varphi_n - \int_{[a, b]} \psi_n \right| \leq (b-a)(d(f, \varphi_n) + d(f, \psi_n)).$

- Il découle directement d'★ et du théorème des gendarmes que, SI les suites $\left(\int_{[a, b]} \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a, b]} \psi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, alors elles ont la même limite — indépendante, donc, de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Montrons maintenant que la suite $\left(\int_{[a, b]} \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

1) Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_n) = 0$, alors $d(f, \varphi_n) \leq 1$ à partir d'un certain rang N . Du coup, si nous notons K un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$, alors pour tous $n \geq N$ et $x \in [a, b]$:

$$|\varphi_n(x)| = |\varphi_n(x) - f(x) + f(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - \varphi_n(x)| \leq K + d(f, \varphi_n) \leq K + 1.$$

En particulier : $\left| \int_{[a,b]} \varphi_n \right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi_n| \leq \int_{[a,b]} (K+1) = (b-a)(K+1)$. Conclusion : la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc possède une suite extraite convergente $\left(\int_{[a,b]} \varphi_{\theta(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, disons de limite ℓ , où $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

2) Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_{\theta(n)}) = 0$, nous pouvons utiliser $\star$ avec $\varphi_{\theta(n)}$ à la place de ψ_n :

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \varphi_{\theta(n)} \right| \leq (b-a) \left(d(f, \varphi_n) + d(f, \varphi_{\theta(n)}) \right). \quad \text{Théorème des gendarmes : } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \ell.$$

- Que dire enfin si f elle-même est en escalier sur $[a, b]$? Dans ce cas, tout simplement, nous pouvons poser $\varphi_n = f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec évidemment $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_n) = 0$. Le calcul de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$ indique bien comme voulu que nos deux définitions de l'intégrale de f coïncident. ■

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux) Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

(i) **Linéarité** : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

Bref, l'application $\varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi$ est une forme linéaire de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

(ii) **Positivité** : Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$. **Croissance** : Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

(iii) **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

(iv) **Relation de Chasles** : Pour tout $c \in [a, b]$: $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

(v) Si f et g sont égales sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, alors : $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

Démonstration Donnons-nous une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b])$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f, \varphi_n) = 0$ et une suite de fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b])$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(g, \psi_n) = 0$.

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| (\lambda f + \mu g) - (\lambda \varphi_n + \mu \psi_n) \right| \leq |\lambda| \cdot |f - \varphi_n| + |\mu| \cdot |g - \psi_n|$, donc il est également vrai que : $d(\lambda f + \mu g, \lambda \varphi_n + \mu \psi_n) \leq |\lambda| d(f, \varphi_n) + |\mu| d(g, \psi_n)$, et enfin $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\lambda f + \mu g, \lambda \varphi_n + \mu \psi_n) = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Aussitôt, par linéarité de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} (\lambda \varphi_n + \mu \psi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lambda \int_{[a,b]} \varphi_n + \mu \int_{[a,b]} \psi_n \right] = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

- (ii) Nous pouvons si nous le souhaitons imposer les inégalités $f \leq \varphi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si en fait $f \geq 0$, alors $\varphi_n \geq 0$. Par positivité de l'intégrale d'une fonction en escalier : $\int_{[a,b]} \varphi_n \geq \int_{[a,b]} 0 = 0 \times (b-a) = 0$, donc après passage à la limite : $\int_{[a,b]} f \geq 0$.

La croissance découle de la positivité et de la linéarité comme dans le cas des fonctions en escalier.

- (iii) Comme dans le cas des fonctions en escalier.

- (iv) Soit $c \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $\varphi_n|_{[a,c]}$ et $\varphi_n|_{[c,b]}$ sont en escalier. Par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d(f|_{[a,c]}, \varphi_n|_{[a,c]}) \leq d(f, \varphi_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f|_{[a,c]}, \varphi_n|_{[a,c]}) = 0$ d'après le théorème des gendarmes, et de même $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f|_{[c,b]}, \varphi_n|_{[c,b]}) = 0$. D'après la relation de Chasles pour les fonctions en escalier :

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{[a,c]} \varphi_n|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_n|_{[c,b]} \right) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

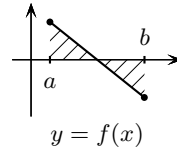
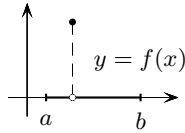
- (v) Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points, $g - f$ est nulle partout sauf en ces points. En particulier $g - f$ est en escalier sur $[a, b]$, donc le calcul explicite de son intégrale est facile, et en l'occurrence ici : $\int_{[a,b]} (g - f) = 0$. Par linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ enfin : $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$. ■

Théorème (Nullité d'une intégrale)

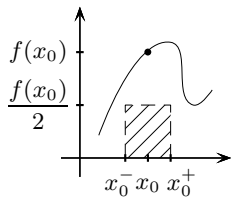
- (i) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue et positive ou nulle et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
- (ii) Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a \neq b$). Si f est strictement positive sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

Attention ! Continuité et positivité sont essentielles dans l'assertion (i), comme l'illustrent les figures ci-dessous.

f est positive ou nulle et $\int_{[a,b]} f = 0$,
mais f n'est pas nulle sur tout $[a, b]$
car elle n'y est pas continue partout.



f est continue et $\int_{[a,b]} f = 0$,
mais f n'est pas nulle sur tout $[a, b]$
car elle n'y est pas positive ou nulle.



Démonstration Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a \neq b$). Supposons f positive ou nulle sur $[a, b]$ et strictement positive en un certain point de continuité $x_0 \in [a, b]$ de f . Tâchons de montrer qu'alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

Par continuité de f en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [a, b]$: $|t - x_0| < \alpha \implies |f(t) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$.
Pour $x_0^- = \max\{a, x_0 - \alpha\}$ et $x_0^+ = \min\{b, x_0 + \alpha\}$, alors $x_0^- < x_0^+$ et pour tout $t \in]x_0^-, x_0^+[$: $f(t) > \frac{f(x_0)}{2}$.

Notons φ l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de valeur $\frac{f(x_0)}{2}$ sur $]x_0^-, x_0^+[$ et 0 sinon. Bien sûr φ est en escalier sur $[a, b]$, et $\varphi \leq f$ sur tout $[a, b]$ par construction — notamment parce que f est positive ou nulle. Du coup, par croissance de l'intégrale : $\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} \varphi = \frac{f(x_0)}{2} (x_0^+ - x_0^-) > 0$. Conséquences :

(ii) est un cas particulier de la situation précédente.

(i) s'en déduit par contraposition. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ positive ou nulle. Si f n'est pas nulle sur tout $[a, b]$, alors $f(x_0) > 0$ pour un certain point de continuité $x_0 \in [a, b]$ de f , donc $\int_{[a,b]} f > 0$. ■

Définition

Soient $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in [a, b]$. On pose :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \begin{cases} \int_{[\alpha, \beta]} f & \text{si } \alpha \leq \beta \\ -\int_{[\beta, \alpha]} f & \text{si } \beta < \alpha. \end{cases}$$

(Notation $\int_a^b f$)

2.4 EXTENSION AU CAS DES FONCTIONS COMPLEXES

La notion de fonction continue par morceaux à valeurs complexes est définie exactement comme dans le cas réel et on note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux à valeurs complexes définies sur $[a, b]$. On peut montrer qu'une fonction à valeurs complexes est continue par morceaux si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes sur un segment)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. On appelle *intégrale de f sur $[a, b]$* le nombre complexe :

$$\int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f), \quad \text{noté } \int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(t) dt.$$

Attention ! Une intégrale en ce sens ne peut pas être interprétée comme une aire, même éventuellement comptée algébriquement, puisqu'il s'agit d'un nombre complexe.

3 INTÉGRATION ET DÉRIVATION

3.1 LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Définition (Primitive) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit qu'une application $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I de dérivée f .

Exemple La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$, et Arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème (« Unicité » des primitives) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application. On suppose que f possède une primitive F sur I . Les primitives de f sur I sont alors toutes les applications $F + \lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

Démonstration Soit $\tilde{F} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \tilde{F} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I &\iff \tilde{F}' = f \text{ sur } I &\iff \tilde{F}' = F' \text{ sur } I \\ &\iff (\tilde{F} - F)' = 0 \text{ sur } I &\iff \tilde{F} - F \text{ est constante sur } I \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} / \tilde{F} = F + \lambda \text{ sur } I. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

⚡⚡⚡ Attention ! Il peut ne pas en exister, mais il n'existe jamais une seule primitive. Ne dites donc pas « la » primitive !

On donne à présent un exemple simple de fonction continue par morceaux n'admettant pas de primitive. Il s'agit de la fonction f de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(1) = 1$ et pour tout $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$: $f(x) = 0$.

En effet Raisonnons par l'absurde en supposant que f possède une primitive F sur $[0, 2]$. Alors $F' = f$ est nulle sur l'intervalle $[0, 1[$, donc F est constante de valeur un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ sur $[0, 1[$. De même, $F' = f$ est nulle sur $]1, 2]$, donc F est constante de valeur un certain $\mu \in \mathbb{R}$ sur $]1, 2]$.

Or F est dérivable, donc continue sur $[0, 2]$. Il en découle que $F(1) = \lambda = \mu$ par continuité. Ceci prouve que F est constante sur tout $[0, 2]$ et donc que $F' = f$ est nulle sur $[0, 2]$, ce qui contredit la définition de f .

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse, version primitive) Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

- (i) L'application $x \mapsto \int_a^x f$ de I dans $\mathbb{K}$ est une primitive de f sur I .
- (ii) Pour tout $A \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule primitive de f sur I de valeur A en a : la fonction $x \mapsto A + \int_a^x f$.

🔗 🔗 🔗 Explication

- Sous cette forme, le théorème fondamental de l'analyse est un théorème d'existence de primitives : il garantit que toute fonction continue possède des primitives.
- Ce théorème est fondamental parce qu'il établit un lien entre des notions apparemment totalement étrangères : d'un côté les notions d'aire, d'intégrale ; de l'autre, la notion de primitive, liée à la dérivation.

⚡⚡⚡ Attention ! Insistons bien : sans hypothèse de continuité, pas de primitive en général !

Démonstration Seule l'assertion (i) mérite qu'on la prouve. Notons F la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ et montrons que F est une primitive de f sur I . Fixons pour cela $x \in I$ et montrons que F est dérivable en x avec $F'(x) = f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité en x , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $s \in I$: $|s - x| < \alpha \implies |f(s) - f(x)| < \varepsilon$. Pour tout $t \in I \setminus \{x\}$ tel que $|t - x| < \alpha$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t) - F(x)}{t - x} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{t - x} \int_x^t (f(s) - f(x)) \, ds \right| \quad \text{car} \quad \int_x^t f(s) \, ds = F(t) - F(x) \quad \text{et} \quad \int_x^t f(x) \, ds = f(x) \int_x^t ds = f(x)(t - x) \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{t - x} \int_x^t |f(s) - f(x)| \, ds \leq \frac{1}{t - x} \int_x^t \varepsilon \, ds = \varepsilon & \text{si } t > x \\ \frac{1}{x - t} \int_t^x |f(s) - f(x)| \, ds \leq \frac{1}{x - t} \int_t^x \varepsilon \, ds = \varepsilon & \text{si } x > t. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x)$, donc que F est dérivable en x avec $F'(x) = f(x)$ comme voulu. $\blacksquare$

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse, version intégrale) Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$ et F une primitive quelconque de f sur I .

Alors : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. On note $[F]_a^b$ ou $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ cette quantité $F(b) - F(a)$.

Démonstration La fonction F est l'unique primitive de f qui vaut $F(a)$ en a , donc $F(x) = F(a) + \int_a^x f$ pour tout $x \in I$ d'après la version primitives du théorème fondamental de l'analyse. Il suffit alors d'évaluer en b . ■

Exemple $\int_0^{2\pi} \sin t \, dt = [-\cos]_0^{2\pi} = 0$ et $\int_0^{2\pi} |\sin t| \, dt = \int_0^\pi \sin t \, dt - \int_\pi^{2\pi} \sin t \, dt = [-\cos]_0^\pi - [-\cos]_\pi^{2\pi} = 4$.

Exemple Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$: $\int_0^1 x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha+1}$. Intégrale très courante, à connaître **PAR CŒUR** !

On présente ci-dessous un exemple d'utilisation de la formule « $\int_0^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}$ ». Il ressemble à mille autres et mérite un sérieux coup d'œil. La grande idée : pour étudier la limite d'une suite d'intégrales, on encadre la fonction intégrée.

Exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \, dt = 0$.

En effet On part de l'inégalité suivante : $\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$. Ensuite on invoque la croissance de l'intégrale : $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \, dt \leq \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$. On conclut enfin à l'aide du théorème des gendarmes.

✕ ✕ ✕ Attention ! Profitons de cet exemple pour prévenir une erreur grave : en général, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) \, dt \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \, dt$. Vous étudierez ce problème en détail l'an prochain. Mais l'idée qu'on n'a pas le droit de permuter $\lim_{n \rightarrow \infty}$ et $\int_a^b$ est à retenir dès maintenant !

3.2 INTÉGRATION PAR PARTIES

Théorème (Intégration par parties) Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. Alors : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

Démonstration Parce que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , $u'v + uv'$ est continue sur I et uv en est une primitive. Le théorème fondamental de l'analyse affirme donc que $\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$. Or les fonctions $u'v$ et uv' sont elles-mêmes continues sur I , d'où finalement, par linéarité : $[uv]_a^b = \int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$. ■

Exemple Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \sin t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, donc :

$$\int_0^\pi t \cos t \, dt = [t \sin t]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \sin t \, dt = - \int_0^\pi \sin t \, dt = -[-\cos t]_{t=0}^{t=\pi} = -2.$$

Exemple Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x \ln t \, dt = \int_1^x 1 \times \ln t \, dt = [t \ln t]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \, dt = [t \ln t - t]_{t=1}^{t=x} = x \ln x - x + 1.$$

En particulier, la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple (Formule de Wallis) $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$

En effet Tout étudiant en prépa rencontre plusieurs fois dans sa carrière la formule de Wallis et les intégrales du même nom. Un grand classique à savoir refaire à tout prix.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$. Ces intégrales sont appelées les *intégrales de Wallis*.

- Soit $n \geq 2$. Les fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \sin^{n-1} t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intégrons par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t \times \sin t \, dt = [\sin^{n-1} t \times (-\cos t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos t \sin^{n-2} t \times (-\cos t) \, dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t (1 - \sin^2 t) \, dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Isolant I_n , nous en déduisons ceci : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ♣.

- Or $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = [-\cos t]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1$. Du coup d'après ♣, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n)(2n-2)\dots 2} I_0 \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 2 \times 1}{((2n)(2n-2)\dots 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \dots = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} I_1 \\ &= \frac{((2n)(2n-2)\dots 2)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\dots 2 \times 1} \times 1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{2^{2n}}{2n+1} \binom{2n}{n}^{-1}. \end{aligned}$$

Il est plus facile de comprendre d'où viennent ces formules en écrivant « ... », mais sur une copie, il conviendrait de faire une récurrence. Notons ♠ ces deux formules.

- Or $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Intégrant cette inégalité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous obtenons la décroissance de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par ailleurs cette suite est strictement positive — on intègre des fonctions strictement positives. Du coup, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2n+1}{2n+2} \stackrel{\clubsuit}{=} \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$. Le théorème des

gendarmes nous fournit finalement la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$, ou encore : $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2^{4n}} \left(n + \frac{1}{2}\right) = 1$.

Et un petit coup de racine carrée pour conclure : $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$

3.3 CHANGEMENT DE VARIABLE

Théorème (Changement de variable) Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. On suppose que $\varphi(I) \subseteq J$.

Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

  **En pratique** Pour retrouver vite la formule, mais sans rigueur, on part de $x = \varphi(t)$. Alors $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, donc $dx = \varphi'(t) \, dt$, puis $f(x) \, dx = f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$. Ensuite intégrer : pendant que t varie de a à b , $x = \varphi(t)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

Cela dit de tels « calculs » ne doivent pas figurer sur vos copies : pas la peine de montrer ce qui se passe en cuisine !

Démonstration Comme $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, f possède une primitive F sur J . Par ailleurs, puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , $f \circ \varphi \times \varphi'$ est alors continue sur I et $F \circ \varphi$ en est une primitive. Le théorème fondamental de l'analyse affirme donc que : $\int_a^b f \circ \varphi \times \varphi' = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$ ■

Exemple L'aire d'un demi-disque de rayon 1 est égale à $\frac{\pi}{2}$. Du coup l'aire d'un disque complet de rayon 1 est égale à π .

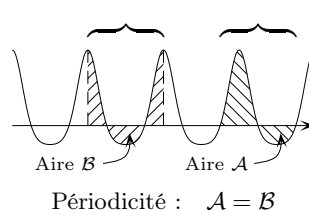
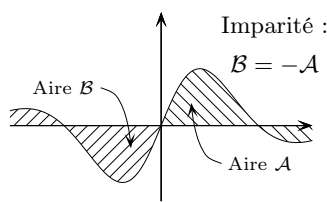
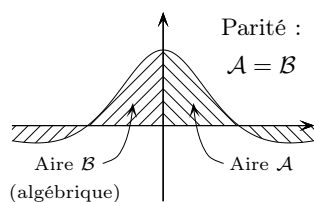
En effet Le cercle trigonométrique a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Son demi-cercle supérieur est donc le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$, positive, et l'aire du demi-disque associé est l'intégrale $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &\stackrel{x=\cos t}{=} \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \times (-\sin t) dt = \int_{\pi}^0 |\sin t| \times (-\sin t) dt = - \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Corollaire (Intégrale et parité/imparité/périodicité)

(i) Soit $f \in \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$. Alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$ si f est paire, et $\int_{-a}^a f = 0$ si f est impaire.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique de période T . Alors $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.



Démonstration

$$\begin{aligned} \text{(i) Cas pair : } \int_{-a}^a f &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f \stackrel{x=-t}{=} \int_a^0 f(-t) \times (-1) dt + \int_0^a f \\ &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f \stackrel{\text{parité}}{=} \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f = 2 \int_0^a f. \end{aligned}$$

Cas impair : Imiter le cas pair.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \int_a^{a+T} f &= \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f(x) dx \stackrel{x=t+T}{=} \int_0^T f + \int_a^0 f + \int_0^a f(t+T) dt \\ &\stackrel{T\text{-périodicité}}{=} \int_0^T f + \int_a^0 f + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f. \end{aligned}$$

3.4 PRIMITIVES USUELLES

Le tableau ci-dessous recense les primitives que vous devez connaître. Pour les apprendre, le mieux consiste à dériver les primitives de la colonne du milieu et à retrouver les fonctions de la colonne de gauche.

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\mathbb{R}_+^*$
a^x avec $a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$

$\tan x$	$-\ln \cos x $	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotan x = -\frac{\cos x}{\sin x}$	$]k\pi, \pi + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $	$]k\pi, \pi + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\frac{1}{\operatorname{th} x}$	$\mathbb{R}_+^* \quad \text{ou} \quad \mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad \text{avec } a > 0$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2 - x^2} \quad \text{avec } a > 0$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right $	$] -\infty, -a[\quad \text{ou} \quad] -a, a[\quad \text{ou} \quad]a, \infty[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{avec } a > 0$	$\operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$	$] -a, a[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad \text{avec } a > 0$	$\ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{avec } a > 0$	$\ln x + \sqrt{x^2 - a^2} $	$] -\infty, -a[\quad \text{ou} \quad]a, \infty[$

4 FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE AVEC RESTE INTÉGRAL ET INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral) Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$.

Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \underbrace{\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt}_{\text{Reste intégral}}$$

🐞 🐞 🐞 **Explication** Cette formule généralise le théorème fondamental de l'analyse, que l'on retrouve pour $n = 0$.

Démonstration Fixons I, a et b et raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$\forall f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K}), \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt.$$

• **Initialisation** : $\mathcal{P}_0$ est l'énoncé du théorème fondamental de l'analyse, version intégrale.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est alors. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$. Alors $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et donc, via $\mathcal{P}_n$:
$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt \quad \star.$$

Les fonctions $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto (b-t)^{n+1}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, faisons simplement une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt &= \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(t) \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (b-t)^{n+1} dt. \end{aligned}$$

Il suffit pour conclure d'insérer ce résultat dans $\star$ et c'est terminé. $\blacksquare$

Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$.

Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(a,b)} |f^{(n+1)}|,$$

où $\sup_{(a,b)} |f^{(n+1)}|$ désigne la borne supérieure de la fonction $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[a, b]$ ou $[b, a]$ d'extrémités a et b .

Démonstration Tout d'abord, la quantité $\sup_{(a,b)} |f^{(n+1)}|$ est un réel bien définie car $|f^{(n+1)}|$ est, par hypothèse, continue sur le segment d'extrémités a et b . Majorons tout simplement, en supposant d'abord que $a \leq b$:

$$\begin{aligned} \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| &= \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt \right| \leq \int_a^b \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!} |b-t|^n dt \\ &\leq \sup_{(a,b)} |f^{(n+1)}| \times \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!} dt = \sup_{(a,b)} |f^{(n+1)}| \times \left[-\frac{|b-t|^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=a}^{t=b} \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(a,b)} |f^{(n+1)}|. \end{aligned}$$

Si $b < a$, on fait pareil mais il faut remplacer les « $\int_a^b$ » par des « $\int_b^a$ » dans les majorations positives. $\blacksquare$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$, résultat que l'on note aussi : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

En effet Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec les points 0 et x . Il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$
 En effet, la fonction $|\exp^{(n+1)}|$ est majorée par $e^{|x|}$ sur le segment d'extrémités 0 et x .

Faisant tendre n vers ∞ et utilisant le théorème des gendarmes, nous obtenons le résultat attendu — on rappelle que les factorielles l'emportent sur les puissances.

5 APPROXIMATIONS D'INTÉGRALES

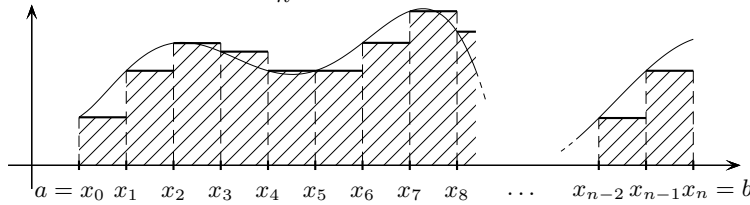
5.1 SOMMES DE RIEMANN

Théorème (Sommes de Riemann)

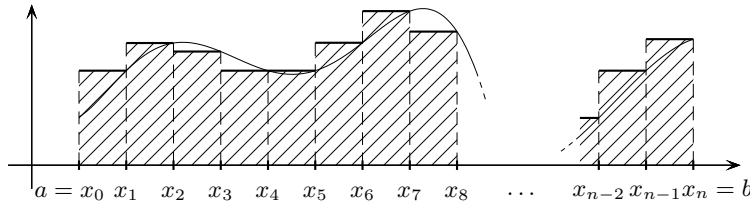
- Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors :
$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$
- Si de plus $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, l'erreur commise dans ces limites est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Explication

- En particulier, le théorème affirme l'**existence** des deux limites.
- L'interprétation géométrique de ce théorème est très simple, il suffit d'un petit dessin pour le comprendre et le retenir. On a noté ci-dessous x_k le point $a + k \frac{b-a}{n}$, l'entier n étant fixé.



L'aire du domaine hachuré est $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.



L'aire du domaine hachuré est $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.

Démonstration Si $a = b$, le résultat est trivial. Nous pouvons donc supposer $a \neq b$. Nous montrerons seulement la première égalité, vous réfléchirez seuls à la façon dont on peut obtenir la seconde à partir de la première.

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$: $|x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Posons $N = \left\lceil \frac{b-a}{\alpha} \right\rceil + 1$ et donnons-nous $n \geq N$. Alors $\frac{b-a}{n} < \alpha$ par définition de N .

Introduisons enfin $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, de sorte que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

- Nous allons montrer l'inégalité : $\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| \leq \varepsilon$, qui prouvera aussitôt le théorème.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Relation de Chasles $\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n}$

- Que se passe-t-il enfin si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$? Nous savons alors que $|f'|$ est continue, de sorte que $K = \max_{[a, b]} |f'|$ est un réel bien défini, et d'après l'inégalité des accroissements finis, f est K -lipschitzienne sur $[a, b]$. On peut alors démontrer le résultat précédent plus rapidement sans utiliser le théorème de Heine, et donner au passage une majoration de l'erreur commise. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x - x_k) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} K \left[\frac{(x - x_k)^2}{2} \right]_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(b-a)^2}{2n^2} = \frac{K(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

Ceci démontre la convergence, mais aussi que : $\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$. ■

Exemple $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$.

En effet $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_{t=0}^{t=1} = \ln 2$ par continuité de

$x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$ (sommes de Riemann).

Exemple $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4n}{e}.$

En effet $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} = \sqrt[n]{n^n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} = n \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t) - (1+t)]_{t=0}^{t=1} = 2 \ln 2 - 1$ par

continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0, 1]$ (sommes de Riemann). Du coup : $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n e^{2 \ln 2 - 1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4n}{e}.$

5.2 LA MÉTHODE DES TRAPÈZES

Le calcul approché d'une intégrale au moyen des sommes de Riemann est généralement appelé la *méthode des rectangles*. Nous avons montré que l'erreur commise était au plus de l'ordre de $O\left(\frac{1}{n}\right)$, si n est le nombre de termes sommés. Cette majoration de l'erreur n'est pas très bonne, car la suite $\frac{1}{n}$ ne tend pas vers 0 très rapidement lorsque n tend vers ∞ . La méthode d'approximation par les sommes de Riemann n'est donc pas pleinement satisfaisante.

Nous allons présenter ici une méthode proche de la précédente, mais de convergence accélérée $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, appelée la *méthode des trapèzes*. Il existe bien d'autres méthodes encore meilleures, mais elles ne figurent pas à notre programme.

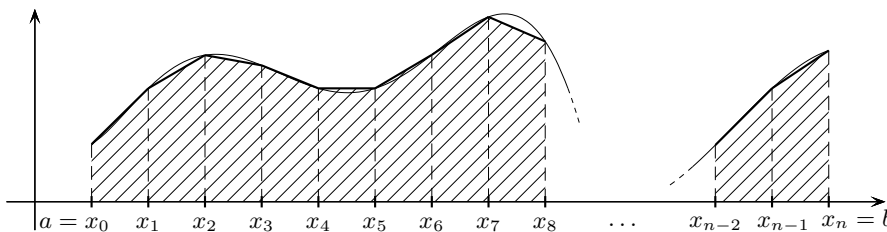
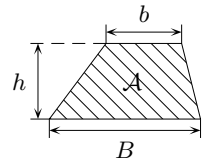
Théorème (Méthode des trapèzes) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

- Alors :
$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right].$$
- De plus, l'erreur commise dans cette limite est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Démonstration Ce résultat n'est pas horrible à montrer, mais le programme nous demande de l'admettre. ■

☺ ☺ ☺ **Explication** On remarquera que le terme « $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ » est presque le terme que nous donnait la méthode des rectangles, aux bornes près. Mais d'où sort cette formule ? L'idée, c'est qu'au lieu d'approximer f par un plateau sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on approxime maintenant à l'aide d'une fonction affine. Les rectangles sont ainsi remplacés par des trapèzes. Il n'est pas dur de se convaincre, intuitivement, que l'approximation par des trapèzes est meilleure que l'approximation par des rectangles.

Rappelons pour les étourdis que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule suivante : $\mathcal{A} = \frac{(B+b) \times h}{2}.$



L'aire du domaine hachuré est

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$

Mais d'où voit-on surgir l'approximation « $\frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right]$ » de $\int_a^b f$? C'est juste un petit calcul :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} &= \frac{b-a}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1})}{2} \right] = \frac{b-a}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{2} \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)}{2} + \frac{f(x_n)}{2} \right] = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right] \quad \text{Et voilà.} \end{aligned}$$